数理解析研究所講究録
378巻 1980年 26-34

虚アーベル体の相対類数

都立大 理学部　飯村 清明

1° $K/\mathbb{Q}$ を実アーベル拡大，$G=Gal(K/\mathbb{Q})$，E を K の単数群，h を K の類数，f を K の conductor とし，$C:=\langle -1, \lambda^{1-\sigma} \mid \sigma\in G\rangle$，$\lambda = \prod_{a\in H}(1-\zeta_f^a)^{\frac{1}{2}}$，$\zeta_f = \exp(\pi i/2f)$，$H$ は類体論の意味で K に対応する $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ の部分群とする．そのとき，C は E の部分群となるが，Hasse [3], Satz 3 は，

(1)　$[E:C] = g\cdot h$

を主張している．ここで，$g=\prod(1-\chi(p))$，積は，K に属する non-trivial, primitive Dirichlet characters χ，及び，f の素因数 p についてとる．($g=0$ である様な体 K に対しては，(1) は，C が E において finite index を有しないことを意味することに注意.) さて，p を odd prime として，p^n-分体を $K=\mathbb{Q}^{(p^n)}$ とする．Iwasawa [4] は，(1) の analogue と思われる次の関係式を発見した：　$[R^-:\underline{S}^-]=h^-$，ここで $R^-=\{\alpha\in\mathbb{Z}[G(K/\mathbb{Q})] \mid \alpha(1+j)=0\}$，$j\in G(K/\mathbb{Q})$ は complex conjugation から induce されたもの；$\underline{S}$ は 2° で定義される level p^n の Stickelberger ideal of R；$\underline{S}^- = R^- \cap \underline{S}$；$h^-$ は K の相対類数，i.e.，$h^- = h/h^+$，h (h^+) は K (K の最大実部分体) の類数。ここでの目的は，任意の虚アーベル体に対して，(1) の analogue と思われる関係式を導くことにある．

ここで，Sinnott [7] 及び Schmidt [8] の結果に触れておく必要がある．前者は，任意の円分体に対して，index $[R^- : \tilde{\underline{S}}^-]$ を完全に計算した．$\tilde{\underline{S}}$ は，すべての levels の Stickelberger elements によって生成された Stickelberger ideal．後者は，Leopoldt [6] Satz 20 で得られている formula の analogue を任意の虚アーベル体に対し与え，また，(1) の analogue も任意の虚アーベル体に対して与えた．あとの方の formula は，私たちのそれと同じであるが，証明が少し異なる．

1°. 以下，次の記号を用いることにする：$K/\mathbb{Q}$ は虚アーベル体，その degree を n，f をその conductor，$G = G(K/\mathbb{Q})$，$R = \mathbb{Z}[G]$，$j \in G$ は，complex conjugation から induce されたもの，$R^- = \{\alpha \in R \mid (1+j)\alpha = 0\}$，$h^-$ を K/K^+ の相対類数，K^+ は K の最大実部分体，そして H は，類体論の意味で K に対応する $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ の部分群．

さて, $\dot{S}^{*} = \frac{1}{f}\sum_{\substack{a=1\\(a,f)=1}}^{f}\left(\frac{k}{a}\right)a$; $\underline{\dot{S}} = \dot{S}R\cap R$, これを Lang [5] に従って, level f の Stickelberger ideal と呼ぶことにする. $e^{-} = (1-j)/2$, $S = e^{-}\dot{S}$, $\underline{S} = SR\cap R$. これは R^{-} の ideal となる. index $[R^{-} : \underline{S}^{*}]$ を計算したい.

今, L, M を $\mathbb{Q}[G]$ の有限生成 $\mathbb{Z}$-modules とし, $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \supseteq M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ とする. そのとき, $T: L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, T は linear transformation で, $T(L)=M$. そこで symbol $(L:M)$ を $|\det(T)|$ で定義する. そのとき容易に次のことがわかる. $(L:M)$ は, T のとり方に依らず; $(L:M)=[L:M]$ ($L\supseteq M$ である限り); N が $\mathbb{Q}[G]$ の有限生成 $\mathbb{Z}$-module で, $(L:M)$, $(M:N)$ が定義されている限り, $(L:N)=(L:M)(M:N)$.

さて, この symbol を用いれば,

$$[R^{-} : \underline{S}] = (R^{-} : e^{-}R)(e^{-}R : e^{-}RS)(e^{-}RS : \underline{S}).$$

先ず, $(R^{-} : e^{-}R) = 2^{-n/2}$; $(e^{-}RS : \underline{S})$ の計算のために, $\Lambda\in\mathbb{N}$ を $\Lambda S\in R$ となる最小数とすれば,

Lem. 1 $e^{-}RS = RS$ であり, $RS/\underline{S}\cong \mathbb{Z}/\Lambda\mathbb{Z}$; 従って, $(e^{-}RS : \underline{S}) = [RS : \underline{S}] = \Lambda$.

(∵) $\varphi: RS\to\mathbb{Z}$ を $\varphi(\sum a_{\sigma}\sigma) = \Lambda a_{1}$ で与え, $\psi: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/\Lambda\mathbb{Z}$ を canonical homo. とし, $\theta = \psi\circ\varphi$ とすれば,

$$0\to \underline{S} \xrightarrow{incl} RS \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}/\Lambda\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$ が示せる. □

$(e^{-}R : e^{-}RS)$ は, $T: e^{-}\mathbb{Q}[G]\to e^{-}\mathbb{Q}[G]$ を $T(u) = uS$

で与えれば，$(e^-R : e^-R\mathfrak{S}) = |\det(T)| = |\prod \chi'(\mathfrak{S})|$；積は，$G$ の odd characters χ' にわたる．$\chi'(\mathfrak{S})$ については，[3]，§8 により **Lemma 2.** 各 odd character χ' of G に対し，χ を χ' から induce される primitive odd Dirichlet character とし，f_χ を χ の conductor；$\Delta(\chi) = \frac{1}{f_\chi} \sum_{\substack{1 \le a \le f_\chi \\ (a, f_\chi)=1}} \chi(a) a$ とすれば，

$$\chi(\mathfrak{S}) = \prod_{p \mid f} (1 - \overline{\chi}(p)) \Delta(\chi).$$

そこで，$\mathfrak{X}$ を K に属する primitive odd Dirichlet characters の set とし，$g^- = \prod_{\substack{p \mid f \\ \chi \in \mathfrak{X}}} (1 - \chi(p))$ とおけば，$(e^-R : e^-R\mathfrak{S}) = g^- |\prod_{\chi \in \mathfrak{X}} \Delta(\chi)|$.

h^- の analytic formula (cf. [3], Chap I) は，

$$h^- = Qw \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} (-\Delta(\chi)/2).$$

ここで Q は K/k^+ の the unit index；w は K にぞくする 1 のベキ根の個数である．$Q = 1$ or 2 である (cf. [3], §20)

以上のことから，$(e^-R : e^-R\mathfrak{S}) = 2^{-n/2} g^- h^- / (Qw)$.

Prop. 1. $[R^- : \mathfrak{S}] = (1/Qw)\, g^- h^-$.

3° 各 prime p に対し，$D(p)$ ($I(p)$) で G における p の decomposition (inertia) group を表わす．

Prop 2. $g^- \neq 0 \Leftrightarrow j \in \bigcap_{\text{all } p} D(p)$；このとき，$g^- = 2^{\sum n / |D(p)|}$，ここで和は，$p \mid f$ かつ $j \notin I(p)$ なる p についてとる．

(∵) $\mathfrak{X}^+ = \{$ primitive even Dirichlet characters associated to $K\}$, $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}^+$ とすれば，$\prod_{\chi \in \mathfrak{X}} (1-\chi(p)p^{-s})$
$= \prod_{\chi \in \tilde{\mathfrak{X}}} (1-\chi(p)p^{-s}) / \prod_{\chi \in \mathfrak{X}^+} (1-\chi(p)p^{-s})$ for any $s \in \mathbb{C}$ である．
知られている様に，$\prod_{\chi \in \tilde{\mathfrak{X}}} (1-\chi(p)p^{-s}) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \text{ in } K \\ \mathfrak{p}|p}} (1-N\mathfrak{p}^{-s})$；
$\prod_{\chi \in \mathfrak{X}^+} (1-\chi(p)p^{-s}) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \text{ in } K^+ \\ \mathfrak{p}|p}} (1-N\mathfrak{p}^{-s})$． そこで $s \to 0$ とすれば，上の Lem. の後半をうる．前半については，殆んど明らかである． ☑

さて，$\dot{\Lambda} \in \mathbb{N}$ を $\dot{\Lambda}\dot{S} \in R$ をみたす最小数とする．

<u>Lem. 3.</u> N を $\mathbb{Q}^{(f)}$ から K への norm とし，$\zeta_f = \exp(\pi i/2f)$ とすれば，$\dot{\Lambda}$ は，$N(\zeta_f)$ の order である． $\dot{\Lambda}$ 及び $(\mathbb{Q}^{(f)}:K)$ が odd ならば，$\Lambda = 2\dot{\Lambda}$ であり，その他の場合には，$\Lambda = \dot{\Lambda}$．

(∵) Gras [1] p37. Cor. II 3，によれば，$\dot{\Lambda} = f/(f, \sum_{a \in H} a)$．これは，明らかに $N(\zeta_f)$ の order である． Λ と $\dot{\Lambda}$ との関係は関係式 $S = \dot{S} - (\mathbb{Q}^{(f)}:K)/2 \cdot \sum_{\sigma \in G} \sigma$ を使えば得られる． ☑

$N(\zeta_f)$ について調べるために，K の任意の 1 のベキ根 α に対して，その order を $O(\alpha)$ と書き；各 prime p に対して，$\mathrm{ord}_p f$ を $n(p)$ とかく．

<u>Lem. 4.</u> $p|f$，fixed に対して，$n' = n(p)$，$L = K\cdot\mathbb{Q}^{(p^{n'})}$，$K_0 = K \cap \mathbb{Q}^{(p^{n'})}$ とすれば，$\mathrm{ord}_p O(N(\zeta_f))$ は，$\mathrm{ord}_p O(N_{\mathbb{Q}^{(p^{n'})}/K_0}\, \zeta_{p^{n'}}{}^{(\mathbb{Q}^{(f)}:L)})$ に等しい．

<u>Lem. 5.</u> $g^- \neq 0$ を仮定すれば，各 odd prime $p|f$ に対

して, $\mathrm{ord}_p\, o(N(\zeta_f)) = \mathrm{ord}_p\, w$. 従って $(\Lambda/w)^{-1} \in \mathbb{Z}$ は, 2のベキである. ($(\Lambda/w)^{-1} \in \mathbb{Z}$ は, Lem. 3 から得られる.)

Lem. 6. $n' = \mathrm{ord}_2 f$; $L = K\cdot\mathbb{Q}^{(2^{n'})}$; $K_0 = K \cap \mathbb{Q}^{(2^{n'})}$ とすれば, $\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f))$ は次のとおりである.

Case 1. $w \equiv 0\ (4)$. $\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f)) = \max\{0, \mathrm{ord}_2 w - \mathrm{ord}_2 (\mathbb{Q}^{(f)} : L)\}$.

Case 2. $w \equiv 2\ (4)$ かつ $K_0 \not\subset \mathbb{R}$. $\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f)) = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(f)} : L)$ is odd; $= 0$ if not.

Case 3. $K_0 \subset \mathbb{R}$. $\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f)) = 0$.

Remark. $w \equiv 0\ (4)$ のとき, $g^- \neq 0$ と仮定すれば, f の odd prime factor はすべて $\equiv 3\ (4)$ である, ことが云える.

以上の Lemmas から, 次の Λ/w に関する information が得られる:

Prop. 3. $g^- \neq 0$ と仮定する. 記号は, Lem. 6 と同じ.

Case 1. $\Lambda/w = 2^{-t}$, $t = \min\{\mathrm{ord}_2 w, \mathrm{ord}_2 (\mathbb{Q}^{(f)} : L)\}$.

Case 2. $\Lambda/w = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(f)} : L)$ is odd; $= 1/2$ if not.

Case 3. $\Lambda/w = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(f)} : K)$ is odd; $= 1/2$ if not.

Cor. $N := \{p \mid \text{prime}, p \mid f\}$ とする. $w \equiv 0\ (4)$ のとき, $g^- \neq 0$ を仮定すれば, $\Lambda/w = 2^{-t}$, $t = \min\{\mathrm{ord}_2 w, \mathrm{ord}_2 w + N - 2 - \mathrm{ord}_2 n\}$.

Remark. Q については, [3] §§ 20-26 を参照する.

4°. いくつかの例について $[R^- : \underline{S}]$ を計算したい.

Prop4. fが素数中ならば，$[R^- : \underline{S}] = h^-$；$f$がcompositeで，$g^- \neq 0$かつ $\exists p$: odd prime st $j \in T(p)$であれば，$[R^- : \underline{S}] = g^-/2 \cdot h^-$.

(∵) fが素数pべキのときには，[3] Satz 22により $Q=1$. また$g^-=1$. $p \neq 2$ならProp 3. Case 3から $\Lambda/w = 1$；$p=2$なら$L = \mathbb{Q}^{(f)}$となるのでProp 3. Case 1により $\Lambda/w = 1$. 次に$p \neq 2$ $j \in T(p)$と仮定すれば，K_0はrealでかつ$|H| = (\mathbb{Q}^{(f)} : K)$はevenとなる. だからProp 3. Case 3により. $\Lambda/w = 1/2$. 又，このときには. [3] Satz 16 により $Q=1$ $\boxtimes$

Cor. $g^- = 1$のときには. $[R^- : \underline{S}] = h^-$（$f$が素数中のとき）；$= h^-/2$（$f$がcompositeのとき）

Remark. $g^- \neq 0$と仮定したとき次のことが示される：Λがevenなら$\underline{S} = \underline{\dot{S}}^-$；$\Lambda$がoddなら$[\underline{S} : \underline{\dot{S}}^-] = 2$. だから 上のCorは，$g^- = 1$ならつねに$[R^- : \underline{\dot{S}}^-] = h^-$を主張している.

Prop. 5. fがcompositeでGのSylow 2-subgroup S_2がcyclicで$g^- \neq 0$とすれば，$[R^- : \underline{S}] = g^-/2^2$ if $w \equiv 0\ (4)$ & $N \geq 3$；$= g^-/2 \cdot h^-$ otherwise.

(∵) $G = S_2 \times M$ (direct)とし，Mのfixed fieldを$\widetilde{K}$，$\widetilde{K}$のunit indexを$\widetilde{Q}$とすれば，$\widetilde{K}/\mathbb{Q}$はcyclicゆえ[3] Sat 23により$\widetilde{Q} = 1$. しかも$(K : \widetilde{K}) = $ odd だから [3] Sat 15により，$Q=1$

が，$\alpha=1$ から従う．$\exists p$: odd prime st $j\in T(p)$ の場合は，すでに Prop 4 で扱われたので，そうでない場合を考える．そのとき，$\tilde{\Gamma}_2$ が cyclic であることから，$j\in T(2)$ が示される．だから $|H|=(\mathbb{Q}^{(4)}:K)=$ even．ゆえに K_0 が real なら Prop 3. Case 3 により，$\Lambda/w=1/2$；$K_0\not\subset\mathbb{R}$ かつ $w\equiv 2\,(4)$ なら Case 2 によりやはり $\Lambda/w=1/2$．最後に $\mathrm{ord}_2 w=2$ のときには，$K_0/\mathbb{Q}$ も cyclic なので $K_0=\mathbb{Q}^{(4)}=\tilde{K}$ をうる．かくして，Prop. 3 の Cor により，Prop. 5 が証明される． ☐

5° Gillard [2] は，[3] Satz 29 を一般の実アーベル体にまで拡張した．この関係式の analogue も一般の虚アーベル体に対して存在すると思われる．又，木村達雄氏は，1° で述べた Sinnott [7] の関係式の一般の虚アーベル体への拡張を考え，その index を計算する実行可能と思われる algorithm を与えたことを注意しておく．

References.

[1] G. Gras, "Application de la notion de φ-objet à l'etude du groupe des classes d'ideaux des extensions abéliennes", Publ. Math. de L'Univ. de Besançon (Théorie des Nombres) 1975–76.

[2] R. Gillard, "Unites cyclotomiques", Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, 3 novembre 1977.

[3] H. Hasse, "Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper." Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1952).

[4] K. Iwasawa, "A class number formula for cyclotomic fields". Ann. of Math. 76 (1962), 171-179.

[5] S. Lang, "Cyclotomic fields" Springer-Verlag (1978).

[6] H.-W. Leopoldt, "Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper". Abh. Deutsch Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Nat. 2 (1953).

[7] W. Sinnott "On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field" Ann. of Math. 108 (1978), 107-134.

[8] C.-G. Schmidt "Grössencharaktere und Relativklassenzahl abelscher Zahlkörper". J. of Number Theory 11 (1979), 128-159.